ФІЗІКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 532.529

В.М. Буйвол, д-р фіз.-мат. наук

КОНЦЕПЦІЯ ГІПОТЕТИЧНОЇ ТЕЧІЇ

Інститут інформатики НАУ, e-mail: buyvol_vn@alfacom.net

Сформульовано положення концепції гіпотетичної течії, на підставі якої задача про рух вільної поверхні у в'язкій рідині зводиться до розв'язку системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно мод деформацій поверхні. Концепція гіпотетичної течії може бути використана для дослідження руху як тонких каверн, так і порожнин в рідині, наділеній властивостями реальних рідин.

Вступ

Дослідження течій з вільними поверхнями виконуються в тих чи інших математичних моделей рідини [1–4].

Модель, яка адекватно відображує основні закономірності течій, зазвичай пов'язується з рівняннями Нав'є–Стокса [1]. Але ці рівняння складні і не завжди їх використання є доцільним. За певних умов можна побудувати хоча і менш точні, але значно простіші математичні моделі.

Аналіз досліджень і публікацій

Найпростішими математичними моделями течій ідеальної рідини навколо вільної поверхні є модель порожнини-бульбашки [1; 2] і модель тонкої осесиметричної каверни [4].

Модель порожнини-бульбашки описується відомими рівняннями Релея [1]. Різні узагальнення цієї моделі можна знайти в праці [2].

Особливо широке розповсюдження отримала лінійна теорія. І хоча в основі простоти моделей лежить по суті незв'язність рівнянь, проте для розв'язку задач часто доводиться застосовувати складний апарат спеціальних функцій [2].

Значні успіхи були досягнуті під час розробки методів покрокового інтегрування [2; 3], побудови функціональних рівнянь у комбінації з методами ітерацій [5], які описували динаміку меж порожнин [3; 6–8].

Часто при побудові моделей використовувалось експериментальну і взагалі напівемпіричну інформацію [7; 9].

Про складність задач для несферичних порожнин свідчить праця [10].

Постановка завдання

У подальшому будемо розрізняти два типи вільних поверхонь:

– межі кавітаційних каверн, що виникають за перешкодами в потоках рідини;

– межі порожнин типу бульбашок у нерухомій рідині.

Розглянемо моделі, які з певними модифікаціями можуть бути застосовані для дослідження течій навколо як каверн, так і порожнин.

За різних умов, які формують течію навколо вільної поверхні, проявляються і різні властивості рідини. Але головними, визначальними, як правило, виступають ті з них, що пов'язані з такими силовими факторами, як гідродинамічний тиск, в'язке тертя, поверхневий натяг, поле сили тяжіння. Дослідження показують, що деякі закономірності можуть бути одержані вже в рамках моделі ідеальної рідини. Оскільки це найпростіша модель, то її рівняння і будуть використані. При цьому рідина має бути наділена такими властивостями, як капілярність, в'язкість, та підлягати силам тяжіння.

Обчислення фіктивного тиску

Будуючи математичну модель динаміки вільної межі замкненої порожнини, необхідно витримувати умову рівності тисків на цю межу. Формулюючи таку умову, доводиться враховувати складові тиску, які породжені різними, у т. ч. і фізичними властивостями рідини або її руху. У ряді задач ці складові тиску входять у рівняння адитивно [7; 9], що дозволяє побудувати гіпотетичну течію ідеальної рідини, яка знаходиться під дією фіктивного тиску, під час обчислення якого і враховуються реальні фізичні властивості рідини. Загальний вираз для тиску в рідині, використовуючи працю [7], отримаємо з рівнянь Нав'є –Стокса, які у випадку нестисливої рідини, потенціальних зовнішніх сил і безвихрового руху, спрощуються та набувають вигляду [1]:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{rot}\vec{v} \times \vec{v} = -\nabla\left(\frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\rho}\right), \qquad (1)$$

де $\vec{v}$ – вектор швидкості; ∇ – оператор Гамільтона; U – потенціал гравітаційних сил; p – гідродинамічний тиск, ρ – густина.

Рівняння (1) не включає характеристику сил в'язкості. Отже, в таких течіях ефект в'язкості проявляється лише в примежовій області течії. Складові тензора напружень p_{rr}, $p_{\vartheta\vartheta}, p_{\psi\psi}$ і тиску p визначаються співвідношеннями [7]:

$$p_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r},\ p_{\vartheta\vartheta} = p_{\psi\psi} = p\,; \qquad (2)$$

де r, ϑ, ψ – система сферичних координат; $\mu = \nu\rho$ – динамічний коефіцієнт в'язкості; v_r – радіальна складова швидкості рідини.

Решта компонент (зсувні напруження) тензора напружень у цьому випадку дорівнюють нулю.

З формули (2) для радіальної складової p_{rr} випливає, що складова тиску, пов'язана з дією в'язких сил, пропорційна до динамічної в'язкості μ і швидкості зміни радіальної складової швидкості рідини вздовж радіуса. Тому ці компоненти у випадку порожнини і каверни відповідно визначаються формулами:

$$v_r = \frac{R^2\dot{R}}{r^2} \quad \Rightarrow \quad p_\mu = -4\mu\frac{\dot{R}}{R};$$

$$v_r = \frac{R\dot{R}}{r} \quad \Rightarrow \quad p_\mu = -2\mu\frac{\dot{R}}{R},$$

де R – радіус меридіанного перерізу порожнини або поперечного перерізу каверни; $\dot{R}$ – швидкість розширення (стиску) цього перерізу.

Розглядаючи течії навколо тонкої кавітаційної каверни, зручно користуватися системою циліндричних координат x, r, ϑ.

Якщо припустити потенціальність течії

$$\vec{v} = \nabla\Phi,$$

то з рівняння (1) випливає інтеграл руху Лагранжа – Коші

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} = f(t), \qquad (3)$$

де $f(t)$ – деяка довільна функція часу.

Ураховуючи вимоги концепції гіпотетичної течії, під функцією p в формулі (3) розуміють сумарний тиск у рідині, який складається з внутрішнього тиску p_i в порожнині, тиску p_τ, який виникає за рахунок дії сили поверхневого натягу, тиску p_g, що виникає із-за суттєвої дії поля сили тяжіння, і тиску p_μ, який є результатом дії сил в'язкості. Цей сумарний тиск будемо позначати спеціальним символом:

$$\widehat{p} = p_i + p_\tau + p_g + p_\mu;$$

$$p_\tau = -2\tau H;$$

$$p_g = \rho g Z;$$

$$p_\mu = -k\mu\frac{\dot{R}}{R},$$

де τ – коефіцієнт поверхневого натягу; H – середня кривизна межової поверхні; Z – підйом точки в рідині над горизонтальною еквіпотенціальною площиною, яка проходить через центр порожнини або центр каверноутворюючого тіла; k=4 для сфероподібної порожнини і k=2 для каверни.

Із сил, які мають потенціал, будемо розглядати тільки сили тяжіння: $U = gZ$. Якщо R' і R'' – головні радіуси кривизни поверхні, то середня кривизна

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right)$$

обчислюється окремо для каверни і сфероподібної порожнини.

Математична модель динаміки замкненої вільної порожнини

Застосуємо сформульовану концепцію гіпотетичної течії до течії ідеальної рідини, в якій утворилася замкнена порожнина, обмежена вільною поверхнею S. У порожнині діє внутрішній тиск p_i. Течію вважаємо потенціальною, однак урахуємо вплив сили тяжіння, поверхневого натягу і в'язкості.

Під час дослідження течії навколо каверни використаємо циліндричні координати (x, r, ϑ), в яких початок збігається з центром каверноутворюючого тіла, вісь Ox направлена в бік, протилежний руху каверни, а кут ϑ відраховується від вертикальної осі Oy. Рух сфероподібної порожнини буде розглядатися в сферичній системі координат:

$$x = r\cos\psi\sin\vartheta;$$

$$y = r\sin\psi\sin\vartheta;$$

$$z = r\cos\vartheta.$$

Нехай в початковий момент часу замкнена вільна поверхня мала форму витягнутого еліпсоїда обертання або строго сферичну форму з початковим радіусом $R_н$. У випадку каверни під $R_н$ розуміють радіус перерізу зриву струменів з кромок каверноутворюючого тіла. Рівняння поверхні збуреної порожнини запишемо в загальному вигляді у випадку каверни:

$$F(t, x, r, \vartheta) = 0$$

або у випадку порожнини

$$F(t, r, \vartheta, \psi) = 0.$$

Тепер математична модель течії навколо порожнини зводиться до розв'язку рівняння Лапласа для потенціалу Φ, і цей розв'язок має бути справедливим зовні поверхні S і задовольняти кінематичну умову непроникності і динамічну умову рівності тисків на межі поверхні. Остання умова є наслідком рівняння (3). Крім того, необхідно, щоб задовольнялась умова на нескінченності (зазвичай це умова “згасання”).

Подамо шуканий потенціал і радіус перерізу вільної поверхні у вигляді суми

$$\Phi = \Phi_0 + \varphi\,;$$

$$R = R_0 + f\,,$$

де φ і f малі відносно Φ_0 і R_0.

Методами лінеаризації перетворимо рівняння гідродинаміки і умови на межах порожнини, записавши ці рівняння для функцій–збурень φ і f.

Для цього, перш за все, розкладемо всі доданки рівнянь в ряди Тейлора за збуренням f в околі недеформованої (незбуреної) поверхні S_0, обмежившись при цьому лінійним наближенням по f. Тоді отримаємо диференціальні рівняння математичної моделі для збурень φ і f:

$$\nabla^2\varphi = 0; \qquad (4)$$

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = (\nabla\Phi_0 - \vec{c})\nabla f - \nabla\varphi\nabla F_0 - f\frac{\partial(\nabla\Phi_0 - \vec{c})\nabla F_0}{\partial n}, \qquad (5)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\nabla\Phi_0 - \vec{c})\nabla\varphi + f\left[\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial n\partial t} + (\nabla\Phi_0 - \vec{c})\frac{\partial\nabla\Phi_0}{\partial n}\right] =$$

$$= -\frac{\partial\Phi_0}{\partial t} + \vec{c}\nabla\Phi_0 - \frac{1}{2}(\nabla\Phi_0)^2 - \frac{\widetilde{p}_n - p_\infty}{\rho}, \qquad (6)$$

$$\vec{c} = \{u\cos\vartheta, -u\sin\vartheta, 0\},$$

де n – додатна нормаль до поверхні; u – швидкість вертикального переміщення порожнини або перерізів каверни.

Як незбурені течії, характеристики яких (Φ_0, F_0) належать до рівнянь (4)–(6) зручно, хоча і не обов’язково використовувати у випадку каверни течії з потенціалом

$$\Phi_0 = R_0\dot{R}_0\ln r - \frac{uR_0^2}{r}\cos\vartheta$$

і у випадку сфероподібної порожнини течії з потенціалом

$$\Phi_0 = \frac{R_0^2\dot{R}_0}{r} - \frac{uR_0^3}{2r^2}\cos\vartheta\,.$$

Потенціал швидкостей збуреної течії навколо осесиметричної каверни або навколо сфероподібної порожнини є розв’язком рівняння Лапласа

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) r^{-n}\begin{cases}\cos n\vartheta;\\ r^{-1}P_n(\lambda),\end{cases} \qquad (7)$$

в якому перший рядок належить до каверни, другий – до порожнини, а $P_n(\lambda)$ – поліном Лежандра першого роду з параметром $\lambda = \cos\vartheta$ [1].

Формула (7) є розкладом потенціалу збуреної течії за тригонометричними функціями або поліномами Лежандра. Оскільки рівняння (6) математичної моделі пов’язує цей потенціал з деформацією $f(t)$ перерізів замкненої вільної поверхні, то цю деформацію також треба шукати у вигляді подібних розкладів:

$$f(t) = f_0(t) + \sum_{n=2}^{\infty} f_n(t)\begin{cases}\cos n\vartheta;\\ P_n(\lambda).\end{cases} \qquad (8)$$

Функції $f_n(t)$, які ще потрібно знайти, визначають величину і характер деформацій початково круглих перерізів з радіусами $R_0(t)$. Їх називають теж модами деформацій відповідного порядку. Функції $a_n(t)$ з формули (7) будемо за аналогією називати модами потенціалу, хоча, звичайно, останній термін у цьому випадку має суто умовний характер.

Використавши ці розклади в рівняннях математичної моделі, можна отримати систему диференціальних рівнянь відносно мод деформацій, розв’язавши яку, будемо мати всі необхідні співвідношення для аналізу динаміки відповідної порожнини.

Якщо порожнина утворюється за швидко рухомим тілом, її форма буде близькою до витягнутого в напрямі руху еліпсоїда обертання. Тоді рух такої вільної поверхні можна визначити, розв’язуючи таку систему рівнянь:

$$\dot{u}\left(-R_0 + \frac{3}{2}f_2\right) + u\left(-2\dot{R}_0 + \frac{\dot{R}_o}{R_0}f_2 + 2\dot{f}_2\right) -$$

$$-\frac{u^2}{R_0}f_3 = 0;$$

$$-\frac{R_0}{n}\ddot{f}_n - \frac{2\dot{R}_0}{n}\dot{f}_n + (n-1)\left(\frac{\ddot{R}_0}{n} + \frac{2u^2}{R_0}\right)f_n -$$

$$-2u\left(\dot{f}_{n-1} - \dot{f}_{n+1}\right) - \left(\frac{\dot{u}}{2} + \frac{u\dot{R}_0}{\dot{R}_0}\right)f_{n-1} +$$

$$+\left(\frac{3\dot{u}}{2} + \frac{u\dot{R}_0}{R_0}\right)f_{n+1} - \frac{nu^2}{R_0}f_{n+2} -$$

$$-\frac{(n-2)u^2}{R_0}f_{n-2} - \frac{u^2}{R_0}f_1\delta_{n3} + \qquad (9)$$

$$+\left[u^2 + \left(\frac{\dot{u}}{2} + \frac{u\dot{R}_0}{R_0}\right)f_1\right]\delta_{n2} = \widetilde{\sigma}_n \quad (n>1),$$

де δ_{nk} – символ Кронекера;

$\widetilde{\sigma}_n = \sigma_n + \dfrac{8\overline{H}_n}{We} - \dfrac{\overline{Z}_n}{2Fr^2}$; $\sigma_n, \overline{H}_n, \overline{Z}_n$ – коефіцієнти розкладів в рядах числа кавітації, якщо воно нестале, середньої кривизни поверхні і підйому межової точки каверни над горизонтальною площиною; W_e і Fr – числа Вебера і Фруда за діаметром початкового перерізу (перерізу зриву струменів).

Система рівнянь (9) має бути доповнена відповідними початковими умовами.

Використавши один з відомих числових методів інтегрування системи (9), наприклад, метод Рунне–Кутта, можна знайти самі збурення за формулою

$$R = R_0 + f(t, \vartheta),$$

де $f(t, \vartheta)$ подається виразом (7), обчислити розміри поперечних перерізів каверни для кожного значення кута ϑ.

У таблиці через дроби наведено значення вертикальних D_B і горизонтальних $D_Г$ діаметрів каверни, отримані в результаті числових розрахунків каверни в полі сили тяжіння. У цих розрахунках було використане число Фруда $\mathrm{Fr} = 10$ (воно відбиває вплив сили тяжіння).

Числа кавітації змінювалися від 0,1 до 0,05.

Відносна координата вздовж осі каверни довжини $2L_k$ дорівнює:

$$x = x^* / L_k .$$

Діаметри каверни

X	Число кавітації реальної течії σ			
	0,1	0,08	0,06	0,05
1,00	5,290 / 6,182	6,482 / 6,968	6,997 / 8,318	6,994 / 9,916
1,25	5,705 / 6,212	5,950 / 7,134	5,655 / 8,844	4,592 / 10,37
1,50	5,015 / 6,128	4,624 / 7,226	2,701 / 9,360	– 0,24 / 11,35

Поперечні перерізи каверни розтягуються по горизонталі і сплющуються по вертикалі, а при малих числах кавітації цей переріз уже майже перетворюється в два вихори.

Отж,е система рівнянь, подібна до системи (9), при дещо більш жорстких вимогах була отримана і проаналізована в праці [6]. Систему рівнянь математичної моделі для сфероподібної порожнини не наведено за браком місця, але вона дуже схожа до системи (9).

Висновки

Виходячи з основних рівнянь гідродинаміки ідеальної рідини, пропонуємо математичну модель течії, яка дозволяє наближено врахувати дію на порожнини в рідині таких характеристик рідини, як її вагомість, капілярність і в'язкість. Крім того, вона може бути використана при розгляді задач для несферичних порожнин.

Список літератури

1. *Ламб Г.* Гидродинамика. – М., Л.: ГИТТЛ, 1947. – 928 с.
2. *Plesset M.S., Prosperitti A.* Bubble dynamics and cavitation // Ann. Rev. Fluid mech. – 1977. – №9.– P.145–185.
3. *Воинов О.В., Воинов В.В.* О движении и заполнении полостей в безграничной жидкости и около плоскости // Прикл. механики и техн. физика. – 1975. – № 1. – С. 84–146.
4. *Логвинович Г.В.* Гидродинамика течений со свободными границами. – К.: Наук. думка, 1969. – 209 с.
5. *Hsu C.C.* On wall effects in cavity flow // J. Ship. Res. – 1984. – 28, №1. – P. 70 –75.
6. *Буйвол В.Н.* Движение и деформация газонаполненных полостей в жидкости // Прикл. гидромеханика. – К.: Наук. думка, 1989. – С. 5–27.
7. *Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф.* Кавитация. – М.: Мир, 1976. – 688 с.
8. *Сима А.* Поведение сферического пузыря у твердой стенки // Теор. основы инж. расчетов.– 1968. – 90, № 1. – С. 84–99.
9. *Shopov P.* Nonstationary motion of a deformable gas bubble in viscous liquid in the presence of wall // Докл. АН Болгарии. – 1999. – V.42, № 1. – С. 43–46.
10. *Fujikawa S., Takahira H.* Dynamics of two nonspherical cavitation bubbles in liquids // Fluid Dyn. Res. – 1989. – 4, №3. – P. 179–194.

Стаття надійшла до редакції 12.03.04.

В.Н. Буйвол

Концепция гипотетического течения

Сформулированы положения концепции гипотетического течения, на основании которой задача о движении свободной поверхности в вязкой жидкости сводится к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений относительно мод деформаций поверхности. Концепция гипотетического течения может быть использована для исследования движения как тонких каверн, так и полостей в жидкости, наделенной свойствами реальных жидкостей.

V.N. Byivol

The concept of hypothetical flows

The basic statements of the concept of hypothetical flow have been formulated. This concept transforms task about free surface motion to solution of system of nonlinear differential equations relatively modes of surface's deformations. This concept transforms task about free surface motion to solution of system of nonlinear differential equations relatively modes of surface's deformations. This concept may be used for investigation of motion of both thin cavities and vacuities in medium with properties of real medium.